

令和7年度

京都・大阪マス・インターセクション

大阪会場 略解

1 (1) 条件を式で表すと $ab+1=2025(a+b)$

変形すると $ab-2025a-2025b=-1$

$$ab-2025a-2025b+2025^2=2025^2-1$$

$$(a-2025)(b-2025)=(2025-1)(2025+1)=2024 \times 2026$$

$x=a-2025, y=b-2025$ とすると, $xy=2024 \times 2026$ であり,

また $ab=(x+2025)(y+2025)=2025(x+y)+2024 \times 2026+2025^2$ であるから

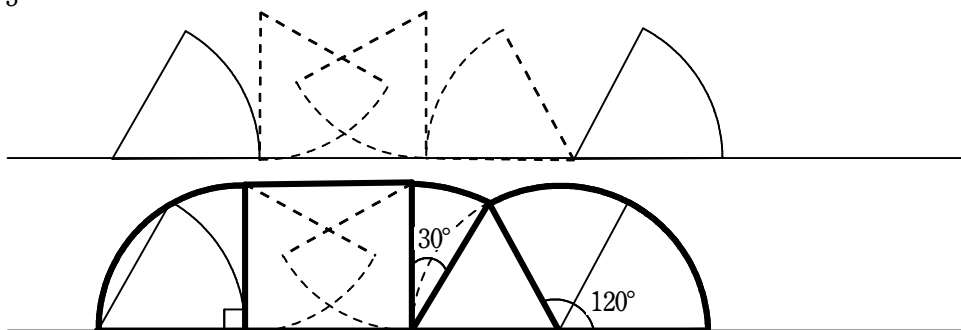
$x+y$ が最小のとき ab は最小となる。

xy は定数であるから, $x+y=\sqrt{(x-y)^2+4xy}$ より, x と y の差が小さいとき $x+y$ が最小。

つまり, ($x \leq y$ なので) $x=2024, y=2026$ のときが最小で $(a, b)=(4049, 4051)$

(2) 扇形が通過する部分の領域は, 半径 1 の扇形で中心角がそれぞれ $90^\circ, 30^\circ, 120^\circ$ のものと,

縦 1, 横 $\frac{1}{3}\pi$ の長方形, 1 辺の長さが 1 の正三角形の 5 つの図形に分割ができる。



よって求める面積は

$$\pi \cdot 1^2 \cdot \frac{(90^\circ + 30^\circ + 120^\circ)}{360^\circ} + 1 \cdot \frac{1}{3}\pi + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \sin 60^\circ = \pi + \frac{\sqrt{3}}{4}$$

【補足】

扇形の中心角を θ ($0 < \theta \leq 60^\circ$) とした場合でも同様に計算ができる。

扇形が通過する領域は, 半径 1 の扇形で中心角がそれぞれ $90^\circ, 30^\circ, 120^\circ$ のものと,

縦 1, 横 $\frac{2\theta}{360}\pi$ の長方形, 1 辺の長さが 1 の正三角形の 5 つの図形に分割ができる。

よって求める面積は

$$\pi \cdot 1^2 \cdot \frac{(90^\circ + 30^\circ + 120^\circ)}{360^\circ} + 1 \cdot \frac{2\theta}{360}\pi + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \sin 60^\circ = \frac{240 + 2\theta}{360}\pi + \frac{\sqrt{3}}{4}$$

60° を超えた場合は計算が非常に大変になる。

興味のある人は考えてみて欲しい。

2 $\triangle EBC = \frac{1}{2} \cdot 6\sqrt{2} \cdot 6 = 18\sqrt{2}$ である。あとは P と $\triangle EBC$ の距離が最小・最大となる P を探せばよい。

S の中心を O とする。 O から辺 GF に引いた垂線と平面 EBC の交点を H とする。

このとき、 OH は BC および EB と垂直なので、平面 EBC に垂直に交わる。よって直線 OH と球面 S の2つの交点のうち線分 OH 上にあるものを P_0 、もう一方を P_1 とすれば、 P と $\triangle EBC$ の距離が最小となるのは $P = P_0$ のときで、 P と $\triangle EBC$ の距離が最大となるのは $P = P_1$ のときである。

$$HP_0 = HO - S \text{ の半径} = \frac{1}{2}AF - 1 = 3\sqrt{2} - 1$$

$$HP_1 = HO + S \text{ の半径} = \frac{1}{2}AF + 1 = 3\sqrt{2} + 1 \quad \text{なので,}$$

$$\text{求める最小値は } \frac{1}{3} \cdot 18\sqrt{2}(3\sqrt{2} - 1) = 36 - 6\sqrt{2}, \quad \text{最大値は } \frac{1}{3} \cdot 18\sqrt{2}(3\sqrt{2} + 1) = 36 + 6\sqrt{2}$$

3 等式 $a^2 + b^3 = c^4$ を満たす素数 a, b と自然数 c が存在すると仮定する。

$$a^2 + b^3 = c^4 \Leftrightarrow b^3 = c^4 - a^2 = (c^2 + a)(c^2 - a)$$

となり、 b は素数で、 $c^2 - a < c^2 + a$ だから、

$$(I) \begin{cases} c^2 - a = 1 \\ c^2 + a = b^3 \end{cases} \text{ のとき}$$

$$c^2 - a = 1 \Leftrightarrow a = (c+1)(c-1) \text{ で } a \text{ は素数, } c-1 < c+1 \text{ だから, } c-1=1 \Leftrightarrow c=2$$

このとき、 $(a, c) = (3, 2)$ だが、 $b^3 = 7$ となり、 b が素数であることに反する。

$$(II) \begin{cases} c^2 - a = b \\ c^2 + a = b^2 \end{cases} \text{ のとき}$$

$$2a = b(b-1) \text{ で } a, b \text{ は素数だから, } b=2 \text{ または } b=a$$

$b=2$ のとき、 $a=1$ となり、 a が素数であることに反する。

$b=a$ のとき、 $(a, b) = (3, 3)$ だが、 $c^2 = 6$ となり、 c が自然数であることに反する。

ゆえに、 $a^2 + b^3 = c^4$ を満たす素数 a, b と自然数 c が存在しない。

4

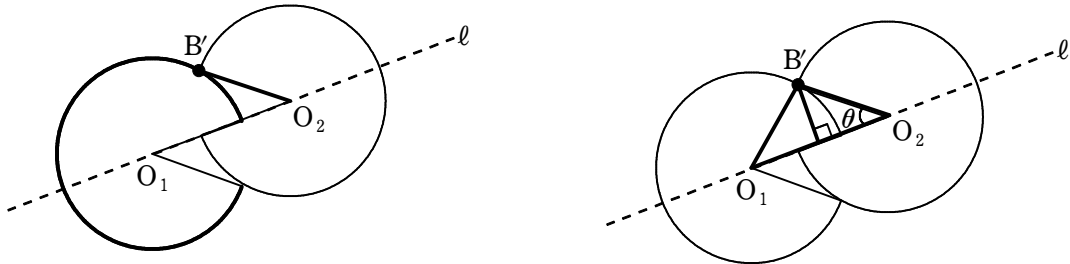
様々な値の θ について図を書いてみると、 θ の値によって、 $\widehat{AA'}$ と O_2B' が

- (1) 点 B' を共有する (2) 接する (3) 点 O_2 を共有する

という 3 通りが起こり得ることに気付くだろう。(1) から (2) に切り替わるときの θ の値は (1) かつ (2)、すなわち扇形 O_1AA' の弧 $\widehat{AA'}$ と O_2B' が点 B' で接する場合を考えることで 45° であると分かる。同様に (2) から (3) に切り替わるときの θ の値は 90° だと分かる。

[1] $0^\circ < \theta \leq 45^\circ$ のとき

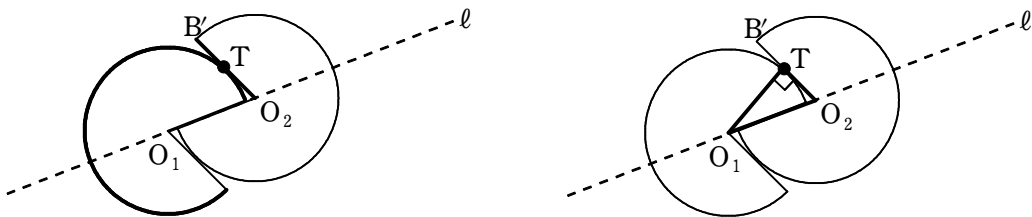
問題の状況では下図のように扇形 O_1AA' の弧 $\widehat{AA'}$ と O_2B' が点 B' を共有する。



$\triangle B'O_1O_2$ は $B'O_1 = B'O_2 = 1$ で $\angle O_2 = \theta$ の二等辺三角形なので、 $O_1O_2 = 2\cos\theta$ である。

[2] $45^\circ < \theta < 90^\circ$ のとき

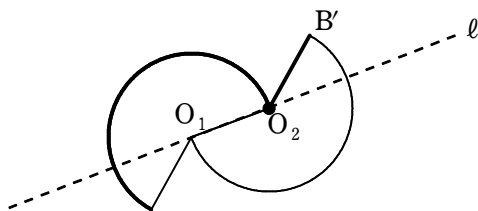
問題の状況では下図のように扇形 O_1AA' の弧 $\widehat{AA'}$ と O_2B' が接する。接点を T とする。



$\triangle TO_1O_2$ は $\angle O_1TO_2 = 90^\circ$ 、 $\angle TO_2O_1 = \theta$ の直角三角形なので、 O_1O_2 はその斜辺となり $O_1O_2 = \frac{1}{\sin\theta}$ である。

[3] $90^\circ \leq \theta < 180^\circ$ のとき

問題の状況では下図のように扇形 O_1AA' の弧 $\widehat{AA'}$ と O_2B' が点 O_2 を共有する。



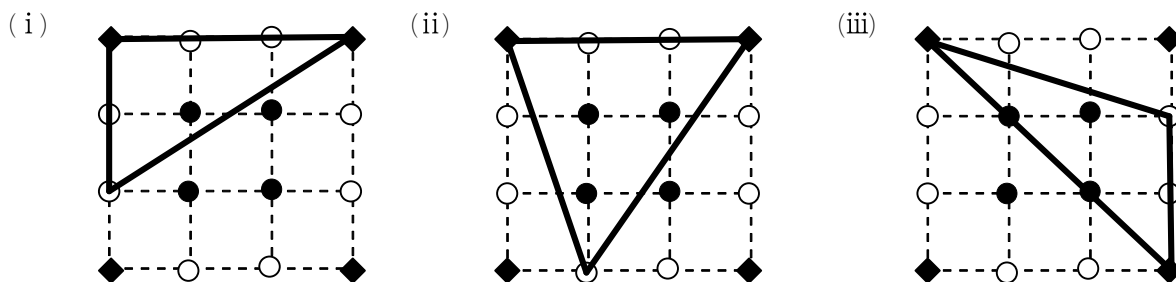
よって、 $O_1O_2 = 1$ である。

[1], [2], [3] より

$$O_1O_2 = \begin{cases} 2\cos\theta & (0^\circ < \theta \leq 45^\circ) \\ \frac{1}{\sin\theta} & (45^\circ < \theta \leq 90^\circ) \\ 1 & (90^\circ < \theta \leq 180^\circ) \end{cases} \quad \text{となる。}$$

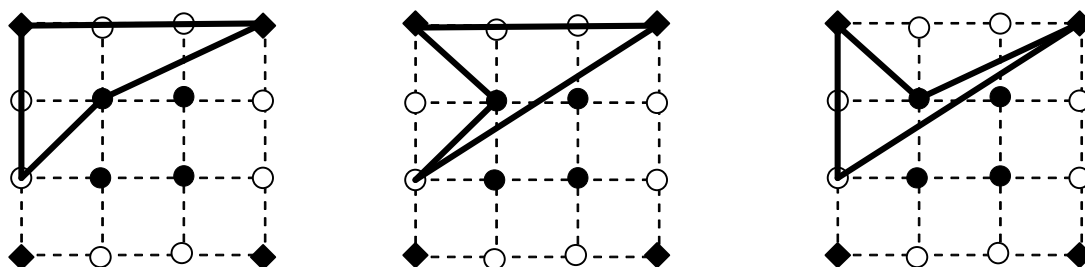
5 まずは◆を2個、○を1個選び三角形を作る。その中で三角形の内部に少なくとも1つ●の頂点をもつようなものを考える。(三角形の辺上の点は除く)

対称性を考慮すると、考えられる三角形の形は以下の3種類であり、◆と○の選び方によりそれぞれ8通りずつある。



次に出来た三角形の内部にある●を1つ選ぶと、3種類の凹四角形が出来る。

(以下は(i)についての例である)



(i), (iii) は三角形の内部に●を1個含むので、 $8 \times 3 \times 2 = 48$ 通り

(ii) は三角形の内部に●を3個含むので、 $8 \times 3 \times 3 = 72$ 通り

以上より $48 + 72 = 120$ 通り