令和６年度大阪府公立学校教員採用選考テスト

高等学校　数学

解答についての注意点

１　解答用紙は、マーク式解答用紙と記述式解答用紙の２種類があります。

２　大問 I ～大問 2 については、マーク式解答用紙に、
大問 3 ～大問 4 については、記述式解答用紙に記入してください。

３　解答用紙が配付されたら、まずマーク式解答用紙に受験番号等を記入し、受験番号に対応する数字を、右の記入例に従って、鉛筆で黒くぬりつぶしてください。※1
記述式解答用紙は、全ての用紙の上部に受験番号のみを記入してください。※2

４　大問 I ～大問 2 については、次のマーク式解答用紙への解答上の注意をよく読んで解答してください。

マーク式解答用紙
受験番号記入例　※1

記述式解答用紙
受験番号記入例　※2

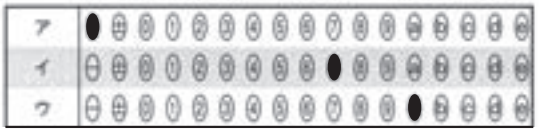
受験番号	１９８３７５

マーク式解答用紙への解答上の注意

（１）　解答は、マーク式解答用紙の問題番号に対応した解答欄にマークしてください。間違ってマークしたときは、消しゴムできれいに消してください。

（２）　問題の文中の ア 、 イウ などには、特に指示のないかぎり、符号（−、±）、数字（0 ～ 9）、又は文字（a ～ e）が入ります。ア、イ、ウ、…の一つ一つは、これらのいずれか一つに対応します。それらをマーク式解答用紙のア、イ、ウ、…で示された解答欄にマークしてください。

例　 アイウ に $-7a$ と答えたいとき



なお、同一の問題文中に ア 、 イウ などが２度以上現れる場合、２度目以降は、 ア 、 イウ のように細枠で表記します。

（３）　分数の形で解答する場合、分数の符号は分子につけ、分母につけてはいけません。

例えば、$\dfrac{\boxed{エオ}}{\boxed{カ}}$ に $-\dfrac{4}{5}$ と答えたいときは、$\dfrac{-4}{5}$ として答えてください。

また、それ以上約分できない形で答えてください。

例えば、$\dfrac{3}{4}$ 、$\dfrac{2a+1}{3}$ と答えるところを、$\dfrac{6}{8}$ 、$\dfrac{4a+2}{6}$ のように答えてはいけません。

（４）　小数の形で解答する場合、指定された桁数の一つ下の桁を四捨五入して答えてください。

また、必要に応じて、指定された桁まで 0 にマークしてください。

例えば、 キ . クケ に 2.9 と答えたいときは、2.90 として答えてください。

（５）　根号を含む形で解答する場合、根号の中に現れる自然数が最小となる形で答えてください。

例えば、$4\sqrt{2}$ 、$\dfrac{\sqrt{13}}{2}$ 、$6\sqrt{2a}$ と答えるところを、$2\sqrt{8}$ 、$\dfrac{\sqrt{52}}{4}$ 、$3\sqrt{8a}$ のように答えてはいけません。

（６）　比の形で解答する場合、最も簡単な整数比で答えてください。

例えば、1 : 3 と答えるところを、2 : 6 のように答えてはいけません。

５　その他、係員が注意したことをよく守ってください。

指示があるまで中をあけてはいけません。

I

（1）AB＝5，BC＝6，∠ABC＝60° の△ABC において，

辺 BC の 3 等分点を B に近い方から D，E とおく。

（ア）AD＝$\sqrt{\boxed{アイ}}$ であり，△ABD の外接円の半径は，$\frac{\sqrt{\boxed{ウエ}}}{\boxed{オ}}$ である。

（イ）△ ABC の辺 AC を 2：3 に内分する点を P とおき，線分 BP と線分 AD の交点を Q，

線分 BP と線分 AE の交点を R とおくと，AR＝$\frac{\sqrt{\boxed{カキ}}}{\boxed{ク}}$ であり，

BQ：QR：RP＝ ケコ ： サ ： シ である。

（2）3 点 A(1，1)，B(−3，−7)，C(5，−1)がある。

このとき，AB，BC の垂直二等分線の方程式は，

それぞれ $y=-\frac{\boxed{ス}}{\boxed{セ}}x-\frac{\boxed{ソ}}{\boxed{タ}}$，$y=-\frac{\boxed{チ}}{\boxed{ツ}}x-\frac{\boxed{テ}}{\boxed{ト}}$ である。

よって，3 点 A，B，C を通る円 O の方程式は，

$(x-\boxed{ナ})^2+(y+\boxed{ニ})^2=\boxed{ヌネ}$ となる。

また，2 点 A，B における円 O の接線の交点を D とすると，

点 D の座標は（ ノハ ， ヒ ）であり，△ABD の面積は フヘ である。

2

(1) 1 から 10 までの自然数が 1 つずつ書かれた 10 枚のカードがある。

2 枚のカードを同時に取り出すとき，取り出した 2 枚のカードの自然数の和が 5 の倍数となる確率は，$\frac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}$ である。

ただし，どのカードが取り出されることも同様に確からしいものとする。

(2) a を定数とする。放物線 $y=-x^2+(a+2)x-a-4$ が x 軸と 2 点で交わり，かつ直線 $y=x+5$ と共有点をもたないような整数 a は，$\boxed{ウ}$ 個ある。

(3) $x+y+z=8$ $(x \geqq 0, y \geqq 0, z \geqq 0)$ を満たす整数 x，y，z の組 (x, y, z) は，全部で $\boxed{エオ}$ 組存在する。

(4) 自然数 n が n 回ずつ続く，次のような数列がある。

1，2，2，3，3，3，4，4，4，4，5，5，5，5，5，…

自然数 24 が初めて現れるのは第 $\boxed{カキク}$ 項で，第 2024 項は自然数 $\boxed{ケコ}$ である。

(5) a を定数とする。3 次方程式 $x^3-(a+6)x^2+(16+6a)x-16a=0$ の 1 つの解が $\sqrt{5}$ であるとき，a の値は $a=\sqrt{\boxed{サ}}$ であり，他の解は $x=\boxed{シ} \pm \sqrt{\boxed{ス}}\,i$ である。

(6) $x=4^{10}$，$y=9^3$，$z=5^2$ とするとき，xyz は $\boxed{セソ}$ 桁の整数である。

ただし，$\log_{10}2=0.3010$，$\log_{10}3=0.4771$ とする。

(7) 平面上に 3 点 O，A，B があり，OA＝7，OB＝8，AB＝9 となっている。

正の実数 t に対して，動点 P を $\overrightarrow{OP}=t\overrightarrow{OA}+\frac{1}{t}\overrightarrow{OB}$ となる点としたとき，$\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OB}$ の内積は $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\boxed{タチ}$ であり，線分 OP の長さの最小値は $\boxed{ツテ}$ である。

(8) 2 つの放物線 C_1 : $y = -x^2$, C_2 : $y = x^2 - 2x + 13$ がある。

放物線 C_1 , C_2 の共通接線 ℓ , m の方程式は,

それぞれ $y =$ [ト] $x +$ [ナ] , $y =$ [ニヌ] $x +$ [ネ] となる。

また, ℓ , m と C_1 で囲まれた部分の面積は $\dfrac{\boxed{ノハヒ}}{\boxed{フヘ}}$ である。

3

（1）複素数 $\left(\dfrac{-1+\sqrt{3}\,i}{1+i}\right)^9$ を計算せよ。

（2）曲線 C：$y = e^x$ 上の異なる 2 点 A（1，e），P（t，e^t）における

それぞれの法線の交点を Q とする。

線分 AQ の長さを $L(t)$ で表すとき，次の問いに答えよ。

ただし，e は自然対数の底である。

（ア）点 A における法線の方程式を求めよ。

（イ）$\lim_{t \to 1} L(t)$ を求めよ。

4

（1）座標平面上に 2 点 A（1，1），B（2，$\dfrac{1}{2}$）がある。

点 P が円 $x^2 + y^2 = 1$ の周上を動くとき，点 P から△ABP の重心までの距離が

最小となる点 P の座標を求めよ。

（2）関数 $f(x)$ を次のように定義する。

$$f(x) = \begin{cases} x & (0 \leqq x \leqq 1 \text{ のとき}) \\ 0 & (x < 0,\ 1 < x \text{ のとき}) \end{cases}$$

自然数 k に対して，$\displaystyle\int_0^2 f\left(\frac{e^x - 1}{k}\right) dx$ を求めよ。

ただし，e は自然対数の底であり，$2.7 < e < 2.8$ を利用してもよい。

【計算用紙】

（必要に応じて使用すること）