

高等学校 数学 解答用紙 (4枚のうち1)

(解答及び解答に至る過程はすべて、解答用紙に記入すること。)

3

得点	
----	--

(1)

$\sqrt{2}$ が有理数であると仮定すると、

$\sqrt{2} = \frac{q}{p} \dots \textcircled{1}$ と表すことができる。ただし、 p, q は互いに素である正の整数。

$\textcircled{1}$ の両辺を2乗して整理すると、

$$2p^2 = q^2 \dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{2}$ より、 q^2 は偶数であるので、 q も偶数である。

よって、 q は、正の整数 k を用いて、 $q = 2k$ と表すことができる。

これを $\textcircled{2}$ に代入すると、

$$2p^2 = (2k)^2$$

$$\text{すなわち、} p^2 = 2k^2 \dots \textcircled{3}$$

$\textcircled{3}$ より、 p^2 は偶数であるので、 p も偶数である。

以上より、 p, q はともに偶数となり、互いに素である正の整数であることに矛盾する。

よって、 $\sqrt{2}$ は有理数でない。

すなわち、 $\sqrt{2}$ は無理数である。

(2)

$P(s, t), G(x, y)$ とする。点 P は円周上の点なので、 $(s - 2)^2 + (t - 1)^2 = 16 \dots \textcircled{1}$

ここで、3点 A, B, P で三角形を作るときの条件は、3点が一直線上にないことである。

よって、 $s \neq 0 \dots \textcircled{2}$

3点 A, B, P が三角形を作るとき、点 G は $\triangle ABP$ の重心なので、

$$x = \frac{0 + 0 + s}{3}, \quad y = \frac{5 + (-5) + t}{3} \quad \text{整理して、} \quad s = 3x, \quad t = 3y$$

これを $\textcircled{1}$ に代入すると、 $(3x - 2)^2 + (3y - 1)^2 = 16$

$$\text{よって、} \left(x - \frac{2}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{3}\right)^2 = \frac{16}{9} \dots \textcircled{4}$$

また、 $\textcircled{2}$ より、 $x \neq 0$ なので、 $\textcircled{4}$ より、 $x = 0$ のとき、 $y = \frac{1 \pm 2\sqrt{3}}{3}$

$\triangle ABP$ の重心 G の軌跡は、点 $\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$ を中心とする半径 $\frac{4}{3}$ の円である。

ただし、点 $\left(0, \frac{1 \pm 2\sqrt{3}}{3}\right)$ をのぞく。

高等学校 数学 解答用紙 (4枚のうち2)

(解答及び解答に至る過程はすべて、解答用紙に記入すること。)

3 (続き)

(3)

$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ について、2次方程式 $x^2 - x - 1 = 0$ の解が

$x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ であることを用いて、

$$a_{n+2} - \frac{1 + \sqrt{5}}{2} a_{n+1} = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \left(a_{n+1} - \frac{1 + \sqrt{5}}{2} a_n \right) \dots \textcircled{1}$$

$$a_{n+2} - \frac{1 - \sqrt{5}}{2} a_{n+1} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \left(a_{n+1} - \frac{1 - \sqrt{5}}{2} a_n \right) \dots \textcircled{2}$$

と表すことができる。

①より、数列 $\left\{ a_{n+1} - \frac{1 + \sqrt{5}}{2} a_n \right\}$ は、公比が $\frac{1 - \sqrt{5}}{2}$ の等比数列であり、初項は

$$a_2 - \frac{1 + \sqrt{5}}{2} a_1 = 1 - \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

$$\text{よって、} a_{n+1} - \frac{1 + \sqrt{5}}{2} a_n = \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \dots \textcircled{3}$$

②より、数列 $\left\{ a_{n+1} - \frac{1 - \sqrt{5}}{2} a_n \right\}$ は、公比が $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ の等比数列であり、初項は

$$a_2 - \frac{1 - \sqrt{5}}{2} a_1 = 1 - \frac{1 - \sqrt{5}}{2} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

$$\text{よって、} a_{n+1} - \frac{1 - \sqrt{5}}{2} a_n = \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n \dots \textcircled{4}$$

④ - ③により、 a_{n+1} を消去して、

$$-\frac{1 - \sqrt{5}}{2} a_n + \frac{1 + \sqrt{5}}{2} a_n = \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n$$

よって、

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left\{ \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right\}$$

受験番号	
------	--

令和5年度大阪府公立学校教員採用選考テスト

高等学校 数学 解答用紙 (4枚のうち3)

(解答及び解答に至る過程はすべて、解答用紙に記入すること。)

4

得点	
----	--

(1)

$$\begin{aligned}
 \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^{\frac{1}{3}} - x^{\frac{1}{3}}}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^{\frac{1}{3}} - x^{\frac{1}{3}}}{h} \times \frac{(x+h)^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{1}{3}}(x+h)^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{2}{3}}}{(x+h)^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{1}{3}}(x+h)^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{2}{3}}} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h) - x}{h \left\{ (x+h)^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{1}{3}}(x+h)^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{2}{3}} \right\}} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{(x+h)^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{1}{3}}(x+h)^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{2}{3}}} \\
 &= \frac{1}{3x^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}}
 \end{aligned}$$

(2) (ア)

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 1+0} g(x) &= \lim_{x \rightarrow 1+0} x^{\frac{1}{3}} = 1 \\
 \lim_{x \rightarrow 1-0} g(x) &= \lim_{x \rightarrow 1-0} (x-a)^3 + b = (1-a)^3 + b \\
 g(x) \text{ が } x=1 \text{ で連続} &\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 1+0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1-0} g(x) \text{ より,} \\
 (1-a)^3 + b &= 1 \\
 \text{したがって, } b &= 1 - (1-a)^3
 \end{aligned}$$

受験番号	
------	--

令和5年度大阪府公立学校教員採用選考テスト

高等学校 数学 解答用紙 (4枚のうち4)

(解答及び解答に至る過程はすべて、解答用紙に記入すること。)

4 (続き)

(イ)

$g(x)$ が、 $x = 1$ で微分可能ならば、 $x = 1$ で連続である。

(ア)より、 $b = 1 - (1 - a)^3 \cdots \textcircled{1}$

$$\lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{g(x) - g(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = f'(1) = \frac{1}{3}(1)^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{g(x) - g(1)}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{(x - a)^3 + b - 1}{x - 1}$$

①より

$$= \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{(x - a)^3 - (1 - a)^3}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{(x - 1)\{(x - a)^2 + (x - a)(1 - a) + (1 - a)^2\}}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1-0} \{(x - a)^2 + (x - a)(1 - a) + (1 - a)^2\} = 3(1 - a)^2$$

$$g(x) \text{ が } x = 1 \text{ で微分可能} \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{g(x) - g(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{g(x) - g(1)}{x - 1} \text{ より,}$$

$$\frac{1}{3} = 3(1 - a)^2 \quad a = \frac{2}{3}, \frac{4}{3}$$

$$\textcircled{1} \text{より} \quad a = \frac{2}{3}, b = \frac{26}{27} \text{ または, } a = \frac{4}{3}, b = \frac{28}{27}$$