受験番号	

2020年度大阪府・大阪市公立学校教員採用選考テスト

高等学校　数学　解答用紙　（４枚のうち１）

（解答及び解答に至る過程はすべて，解答用紙に記入すること）

3

得点	

〔１〕（１）

l_a の方程式は $y = 2ax - a^2$

l_a と m_a のなす角を θ $(0 < \theta < \frac{\pi}{2})$ とおくと, $\tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = 2a$

$\therefore \tan\theta = \frac{1}{2a}$

また, n_a と x 軸の正の向きのなす角は $\frac{\pi}{2} - 2\theta$ なので n_a の傾きは

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - 2\theta\right) = \frac{1}{\tan 2\theta} = \frac{1 - \tan^2\theta}{2\tan\theta} = \frac{1 - \frac{1}{4a^2}}{\frac{1}{a}} = \frac{4a^2 - 1}{4a}$$

よって, n_a の方程式は $y - a^2 = \frac{4a^2 - 1}{4a}(x - a)$ より

$$y = \frac{4a^2 - 1}{4a}x + \frac{1}{4}$$

この式は $x = 0$ のとき $y = \frac{1}{4}$ なので, 直線は定点 $(0, \frac{1}{4})$ を通る。

（２）

x の 2 次方程式 $x^2 = \frac{4a^2 - 1}{4a}x + \frac{1}{4}$ を解くと

$4ax^2 - (4a^2 - 1)x - a = 0$

$(4ax + 1)(x - a) = 0$

$\therefore x = -\frac{1}{4a}, a$

よって, 求める面積は

$$\int_{-\frac{1}{4a}}^{a} \left(\frac{4a^2 - 1}{4a}x + \frac{1}{4} - x^2\right) dx = -\int_{-\frac{1}{4a}}^{a} \left(x + \frac{1}{4a}\right)(x - a)\, dx$$

$$= \frac{\left\{a - \left(-\frac{1}{4a}\right)\right\}^3}{6} = \frac{\left(a + \frac{1}{4a}\right)^3}{6} \geqq \frac{\left(2\sqrt{a \cdot \frac{1}{4a}}\right)^3}{6} = \frac{1}{6}$$

$(\because a > 0$ かつ $\frac{1}{4a} > 0$ より相加平均・相乗平均の関係を用いると $a + \frac{1}{4a} \geqq 2\sqrt{a \cdot \frac{1}{4a}} = 1)$

等号成立は $a = \frac{1}{4a}$ すなわち, $a > 0$ より $a = \frac{1}{2}$ のとき。

よって, 面積が最小となる a の値は $a = \frac{1}{2}$ である。

受験番号	

2020年度大阪府・大阪市公立学校教員採用選考テスト

高等学校　数学　解答用紙　（４枚のうち２）

（解答及び解答に至る過程はすべて，解答用紙に記入すること）

3　（続き）

〔２〕

$\triangle$ABC について辺 AB, 辺 BC, 辺 CA の長さをそれぞれ c, a, b とおく。

$$\mathrm{S}=\frac{1}{2}bc\sin\mathrm{A}$$
$$=\frac{1}{2}bc\sqrt{1-\cos^2\mathrm{A}}\quad(\because \sin\mathrm{A}\geqq 0)$$
$$=\frac{1}{2}bc\sqrt{(1+\cos\mathrm{A})(1-\cos\mathrm{A})}$$
$$=\frac{1}{2}bc\sqrt{\left(1+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)\left(1-\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)}\quad\left(\because \cos\mathrm{A}=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)$$
$$=\frac{1}{2}bc\sqrt{\left(\frac{(b+c)^2-a^2}{2bc}\right)\left(\frac{a^2-(b-c)^2}{2bc}\right)}$$
$$=\sqrt{\left(\frac{(b+c)+a}{2}\right)\left(\frac{(b+c)-a}{2}\right)\left(\frac{a-(b-c)}{2}\right)\left(\frac{a+(b-c)}{2}\right)}$$
$$=\sqrt{\left(\frac{a+b+c}{2}\right)\left(\frac{-a+b+c}{2}\right)\left(\frac{a-b+c}{2}\right)\left(\frac{a+b-c}{2}\right)}$$
$$=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

受験番号	

2020年度大阪府・大阪市公立学校教員採用選考テスト

高等学校　数学　解答用紙　（４枚のうち３）

（解答及び解答に至る過程はすべて，解答用紙に記入すること）

4

得点	

（１）

$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ とおく。

$a_n = S_n - S_{n-1} (n \geqq 2)$ より

$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (S_n - S_{n-1})$

$= \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1}$ (∵ 無限級数の和 S が存在する)

$= S - S$

$= 0$

（２）

つねに和が存在するとは限らない。 反例として，

$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ であるが $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$ は発散する。

なぜなら x の関数 $f(x) = \frac{1}{x}$ は単調減少関数より $k > 0$ について

$\frac{1}{k} > \int_k^{k+1} f(x)\,dx > \frac{1}{k+1}$

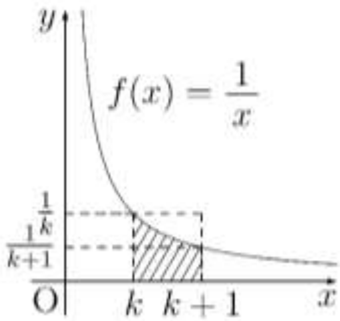
$\therefore \frac{1}{k} > \log(k+1) - \log k$

よって $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} > \sum_{k=1}^{n} (\log(k+1) - \log k)$

すなわち $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} > \log(n+1)$

また $\lim_{n\to\infty} \log(n+1) = \infty$

よって $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n}\right) = \infty$



受験番号	

2020年度大阪府・大阪市公立学校教員採用選考テスト

高等学校　数学　解答用紙　（４枚のうち４）

（解答及び解答に至る過程はすべて，解答用紙に記入すること）

4　（続き）

（３）

与えられた無限級数の初項から第 n 項までの部分和を

$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ とおく。

任意の自然数 n に対して, $S_{2n-1} = 1$ より $\lim_{n \to \infty} S_{2n-1} = 1$

また $S_{2n} = 1 - \dfrac{2n}{(2n+1)!}$

$= 1 - \dfrac{(2n+1)-1}{(2n+1)!}$

$= 1 - \dfrac{1}{(2n)!} + \dfrac{1}{(2n+1)!}$

$\therefore \lim_{n \to \infty} S_{2n} = 1$

したがって $\lim_{n \to \infty} S_n = 1$

よって与えられた無限級数の和は存在し，和は１である。