

高等学校 数学

解答についての注意点

- 1 解答用紙は、マーク式解答用紙と記述式解答用紙の2種類があります。
- 2 大問 **1**～大問 **3**については、マーク式解答用紙に、
大問 **4**については、記述式解答用紙に記入してください。
- 3 解答用紙が配付されたら、まずマーク式解答用紙に氏名を記入し、受験番号を
右の記入例に従って、鉛筆で黒くぬりつぶしてください。※1
記述式解答用紙は、全ての用紙の上部に受験番号のみを記入してください。※2
- 4 大問 **1**～大問 **3**については、次のマーク式解答用紙への解答上の注意をよく
読んで解答してください。

マーク式解答用紙
受験番号記入例 ※1



記述式解答用紙
受験番号記入例 ※2

受験番号	1 9 8 3 7 5
------	-------------

マーク式解答用紙への解答上の注意

- (1) 解答は、マーク式解答用紙の問題番号に対応した解答欄にマークしてください。間違えてマークしたときは、消しゴムできれいに消してください。
- (2) 問題の文中の **ア**、**イウ** などには、特に指示のないかぎり、符号（－、±）、数字（0～9）、又は文字（a～e）が入ります。**ア**、**イ**、**ウ**、…の一つ一つは、これらのいずれか一つに対応します。それらをマーク式解答用紙の**ア**、**イ**、**ウ**、…で示された解答欄にマークしてください。

例 **アイウ** に $-7a$ と答えたいとき

ア	+	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	a	b	c	d	e
イ	-	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	a	b	c	d	e
ウ	±	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	b	c	d	e	

なお、同一の問題文中に **ア**、**イウ** などが2度以上現れる場合、2度目以降は、**ア**、**イウ** のように細字で表記します。

- (3) 分数の形で解答する場合、分数の符号は分子につけ、分母につけてはいけません。

例えば、 $\frac{\text{エオ}}{\text{カ}}$ に $-\frac{4}{5}$ と答えたいときは、 $\frac{-4}{5}$ として答えてください。

また、それ以上約分できない形で答えてください。

例えば、 $\frac{3}{4}$ 、 $\frac{2a+1}{3}$ と答えるところを、 $\frac{6}{8}$ 、 $\frac{4a+2}{6}$ のように答えてはいけません。

- (4) 小数の形で解答する場合、指定された桁数の一つ下の桁を四捨五入して答えてください。また、必要に応じて、指定された桁まで **0** にマークをしてください。

例えば、**キ**、**クケ** に 2.9 と答えたいときは、2.90 として答えてください。

- (5) 根号を含む形で解答する場合、根号の中に現れる自然数が最小となる形で答えてください。

例えば、 $4\sqrt{2}$ 、 $\frac{\sqrt{13}}{2}$ 、 $6\sqrt{2a}$ と答えるところを、 $2\sqrt{8}$ 、 $\frac{\sqrt{52}}{4}$ 、 $3\sqrt{8a}$ のように答えてはいけません。

- 5 その他、係員が注意したことをよく守ってください。

指示があるまで中をあけてはいけません。

1

(1) $x^2 - 6y^2 + xy + 5x + 5y + 6$ を因数分解すると $(x - \boxed{\text{ア}}y + \boxed{\text{イ}})(x + \boxed{\text{ウ}}y + \boxed{\text{エ}})$ となる。

また、 $x^2 - 6y^2 + xy + 5x + 5y + 9 = 0$ を満たす整数の組 (x, y) のうち x の値が最も小さくなるのは $(x, y) = (\boxed{\text{オカ}}, \boxed{\text{キ}})$ である。

(2) $\triangle ABC$ において、 $AB = 5$, $BC = 8$, $\angle ABC = 60^\circ$ とする。このとき、 $AC = \boxed{\text{ク}}$ である。また、

$\triangle ABC$ の外接円の半径は $\frac{\boxed{\text{ケ}}\sqrt{\boxed{\text{コ}}}}{\boxed{\text{サ}}}$ である。

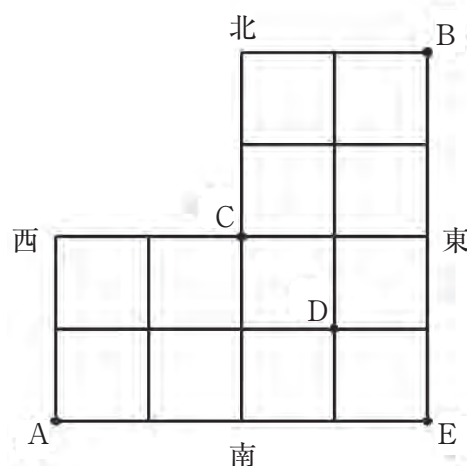
(3) 実数 x, y に関する条件 p, q を次のように定める。ただし、 a は正の定数とする。

$$p : x^2 + y^2 \leq a$$

$$q : |x + y| \leq 1 \text{ かつ } |x - y| \leq 1$$

命題「 p ならば q である」が真となるための a の値の範囲は $0 < a \leq \frac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{ス}}}$ である。

(4) 右図のような道がある。東西の道と南北の道の出会う地点を交差点と呼び、隣り合う交差点間の道の長さはすべて等しいものとする。



① A 地点から C 地点を通り B 地点へ最短距離で到達する経路は セソ 通りある。また、A 地点から B 地点へ最短距離で到達する経路は タチ 通りある。

② 点 P が A 地点から B 地点へ次のようにして進む。

点 P は東方向か北方向のいずれかの方向にしか進めない。また、交差点において、東方向か北方向のいずれか一方にしか進めないときは確率 1 でその方向に進み、両方に進めるときはそれぞれ確率 $\frac{1}{2}$ で東方向か北方向に進む。例えば、E 地点においては確率 1 で北方向に進み、C 地点、D 地点においてはそれぞれ確率 $\frac{1}{2}$ で東方向か北方向に進む。

このとき、A 地点から D 地点を通り B 地点へ到達する確率は $\frac{\text{ツ}}{\text{テ}}$ であり、A 地点から C 地点を通り B 地点へ到達する確率は $\frac{\text{トナ}}{\text{二又}}$ である。

また、点 Q が B 地点から A 地点へ次のようにして進む。

点 Q は西方向か南方向のいずれかの方向にしか進めない。また、交差点において、西方向か南方向のいずれか一方にしか進めないときは確率 1 でその方向に進み、両方に進めるときはそれぞれ確率 $\frac{1}{2}$ で西方向か南方向に進む。

点 P が A 地点から、点 Q が B 地点からそれぞれ同時に出発するとき、点 P と点 Q が出会う確率は $\frac{\text{ネノ}}{\text{ハヒフ}}$ である。ただし、点 P の進む速さと点 Q の進む速さは同じであり、点 P と点 Q はそれぞれ一定の速さで静止することなく進むものとする。

- (1) 次の表は、あるクラスの生徒 10 人に対して、20 点満点のテストを 2 回行い、その得点をまとめたものである。ただし、テストの得点は整数値である。

	1 回目	2 回目
生徒 1	4	8
生徒 2	7	15
生徒 3	5	9
生徒 4	15	16
生徒 5	2	A
生徒 6	11	12
生徒 7	6	6
生徒 8	8	14
生徒 9	18	B
生徒 10	14	18

1 回目のテストについて、平均値は $\boxed{\text{ア}}$ 点であり、中央値は $\boxed{\text{イ}}$ 、 $\boxed{\text{ウ}}$ 点であり、分散は $\boxed{\text{エオ}}$ である。

2 回目のテストについて、平均値は 12 点、分散は 16 である。このとき、 $A < B$ とすると、生徒 5 の 2 回目のテストの得点 A は $\boxed{\text{カ}}$ 点であり、生徒 9 の 2 回目のテストの得点 B は $\boxed{\text{キク}}$ 点である。

また、1 回目と 2 回目のテストの得点をそれぞれ 5 倍して 100 点満点に換算した。このとき、1 回目のテストについて、元の得点と換算後の得点との相関係数は $\boxed{\text{ケ}}$ である。

また、1 回目のテストの換算後の得点と 2 回目のテストの換算後の得点との相関係数は $\boxed{\text{コ}}$ 、 $\boxed{\text{サシ}}$ である。

- (2) 放物線 $C: y = 4x^2$ と直線 $l: y = 4x + 3$ がある。放物線 C と直線 l との交点をそれぞれ A, B とする。ただし、点 A の x 座標は点 B の x 座標より小さい。このとき、 $A\left(\frac{\boxed{\text{スセ}}}{\boxed{\text{ソ}}}, \boxed{\text{タ}}\right)$, $B\left(\frac{\boxed{\text{チ}}}{\boxed{\text{ツ}}}, \boxed{\text{テ}}\right)$ である。放物線 C 上の点で、 x 座標が -1 となる点を P とする。点 P を通り $\triangle PAB$ の面積を 2 等分する直線の方程式は $y = \frac{\boxed{\text{ト}}}{\boxed{\text{ナ}}}x + \frac{\boxed{\text{ニヌ}}}{\boxed{\text{ネ}}}$ である。

3

(1) 曲線 $C: y = |x^2 - 2x|$ と直線 $l: y = mx$ がある。ただし、 $m > 0$ とする。

曲線 C について、 $x \leq \text{ア}$ 、 $\text{イ} \leq x$ のとき $y = x^2 - 2x$ となり、 $\text{ア} < x < \text{イ}$ のとき $y = -x^2 + 2x$ となる。

曲線 C と直線 l が異なる 3 つの共有点をもつ条件は $\text{ウ} < m < \text{エ}$ である。このとき、曲線 C と直線 l で囲まれた部分の面積の和を S とすると

$$S = -\frac{1}{6} (m^3 - \text{オカ} m^2 + \text{キク} m - \text{ケ})$$

であるから、 S は $m = \text{コ} - \text{サ} \sqrt{\text{シ}}$ のとき、最小値 $\frac{8}{3} (\text{スセ} - \text{ソタ} \sqrt{\text{チ}})$ をとる。

(2) 1 辺の長さが 1 の正四面体 $OABC$ において、辺 OA の中点を D 、辺 OB を $2:1$ に内分する点を E 、辺 OC を $a:(1-a)$ に内分する点を F とする。ただし、 $0 < a < 1$ とする。

$\vec{OA} \cdot \vec{OB} = \vec{OB} \cdot \vec{OC} = \vec{OC} \cdot \vec{OA} = \frac{\text{ツ}}{\text{テ}}$ である。 $\vec{EF} = \frac{\text{トナ}}{\text{ニ}} \vec{OB} + \frac{\text{ヌ}}{\text{ニ}} \vec{OC}$ となり、 $|\vec{EF}|$ は

$a = \frac{\text{ネ}}{\text{ノ}}$ のとき最小値をとる。

$a = \frac{\text{ネ}}{\text{ノ}}$ のとき、 $\triangle DEF$ の重心を G 、直線 OG と平面 ABC との交点を H とすると、

$OG = \frac{\text{ハ}}{\text{ヒ}} OH$ である。

4

関数 $f(x) = xe^{-x}$ について、次の (1) ~ (3) の問いに答えよ。ただし、 e は自然対数の底とし、 $2 < e < 3$ を用いてもよい。

- (1) $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$ をそれぞれ求めよ。
- (2) $f(x)$ の第 n 次導関数を $f^{(n)}(x)$ とする。(1) の結果より、 $f^{(n)}(x)$ を類推し、それが正しいことを証明せよ。ただし、 n は自然数とする。
- (3) 任意の自然数 n に対して、 $f^{(n)}(x) = 0$ を満たす x の値を x_n とする。このとき、次の①, ②の問いに答えよ。
- ① $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(x_n)}{n}$ を求めよ。
- ② $\sum_{n=1}^{\infty} f(x_n)$ を求めよ。ただし、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{e^n} = 0$ を用いてもよい。

【 計算用紙 】

(必要に応じて使用すること)

