受験番号	

平成29年度大阪府・大阪市公立学校教員採用選考テスト

高等学校　数学　解答用紙　（２枚のうち１）

4

得点	

（１）

$f(x)=xe^{-x}$ より

$$f'(x)=e^{-x}-xe^{-x}=-(x-1)e^{-x}$$
$$f''(x)=-e^{-x}+(x-1)e^{-x}=(x-2)e^{-x}$$
$$f'''(x)=e^{-x}-(x-2)e^{-x}=-(x-3)e^{-x}$$

（２）

$f^{(n)}(x)=(-1)^n(x-n)e^{-x}$ …（ｉ）　と類推される。

〔1〕　$n=1$ のとき $f'(x)=-(x-1)e^{-x}$ となり（ｉ）は成り立つ。

〔2〕　$n=k$ のとき　（ｉ）　が成り立つと仮定すると

$$f^{(k)}(x)=(-1)^k(x-k)e^{-x}$$

$n=k+1$ のとき

$$f^{(k+1)}(x)=\left\{(-1)^k(x-k)e^{-x}\right\}'$$
$$=(-1)^k\left\{e^{-x}-(x-k)e^{-x}\right\}$$
$$=(-1)^k\times(-1)\times(x-k-1)e^{-x}$$
$$=(-1)^{k+1}\left\{x-(k+1)\right\}e^{-x}$$

よって，$n=k+1$ のときも（ｉ）が成り立つ。

〔1〕,〔2〕より（ｉ）は，すべての自然数 n について成り立つ。

受験番号	

平成29年度大阪府・大阪市公立学校教員採用選考テスト

高等学校　数学　解答用紙　（２枚のうち２）

4　（続き）

（３）

①	$f^{(n)}(x_n)=(-1)^n(x_n-n)e^{-x_n}=0$ より，$x_n=n$ となる。 $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f(x_n)}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f(n)}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{ne^{-n}}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}e^{-n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{e}\right)^n$$ $2<e<3$ より，$\frac{1}{3}<\frac{1}{e}<\frac{1}{2}$ となる。 よって $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{e}\right)^n=\frac{\frac{1}{e}}{1-\frac{1}{e}}=\frac{1}{e-1}$
②	$$\sum_{n=1}^{\infty}f(x_n)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f(x_k)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f(k)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}ke^{-k}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{e^k}$$ ここで，$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{e^k}$　とおくと　$S_n=\frac{1}{e}+\frac{2}{e^2}+\frac{3}{e^3}+\cdots+\frac{n}{e^n}\cdots$（ⅱ） $\frac{1}{e}S_n=\frac{1}{e^2}+\frac{2}{e^3}+\cdots+\frac{n-1}{e^n}+\frac{n}{e^{n+1}}\cdots$（ⅲ） （ⅱ）－（ⅲ）から $$\left(1-\frac{1}{e}\right)S_n=\frac{1}{e}+\frac{1}{e^2}+\frac{1}{e^3}+\cdots+\frac{1}{e^n}-\frac{n}{e^{n+1}}=\frac{1}{e}\left(\frac{1-\frac{1}{e^n}}{1-\frac{1}{e}}\right)-\frac{n}{e^{n+1}}$$ $=\frac{1}{e-1}\left(1-\frac{1}{e^n}\right)-\frac{n}{e^{n+1}}$ となるので $$S_n=\frac{e}{(e-1)^2}\left(1-\frac{1}{e^n}\right)-\frac{1}{e-1}\frac{n}{e^n}$$ $2<e<3$ であり，$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{e^n}=0$ だから $$\sum_{n=1}^{\infty}f(x_n)=\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{e}{(e-1)^2}$$