

平成28年度

京都・大阪数学コンテスト

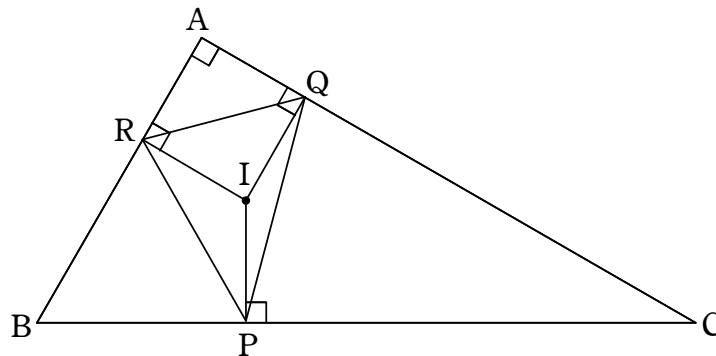
注 意 事 項

- 1 問題は、1 ページから 6 ページにあります。
- 2 解答用紙は、全部で 5 枚あります。
- 3 あなたのコンテスト番号と氏名をすべての解答用紙に記入してください。
- 4 解答は、問題番号に対応した解答用紙に記入してください。なお、問題番号 **①** については答えのみを、問題番号 **②** ~ **⑤** については答えのみでなく考え方等も記入してください。（問題番号 **②** ~ **⑤** については、考え方等も採点対象となります。）
- 5 解答時間は 3 時間です。なお、トイレ等に行く場合は監督の指示に従ってください。

1 次の各問いに答えなさい。

- (1) n は正の整数で、 n^n は 2016 で割り切れる。このような n のうち、最小のものを求めなさい。

- (2) 次の図のように、 $\angle BAC = 90^\circ$ の直角三角形 ABC があり、 $AB = 4$ 、 $BC = 8$ 、 $CA = 4\sqrt{3}$ である。この $\triangle ABC$ の内部の点 I から 3 辺 BC 、 CA 、 AB にそれぞれ垂線 IP 、 IQ 、 IR をひくと、 $IP = IQ = IR$ であった。
このとき、 $\triangle PQR$ の面積を求めなさい。



- (3) 図1のような1辺の長さが4の立方体 $ABCD - EFGH$ と、図2のような1辺の長さが6の正方形を底面とする高さが6の正四角錐 $P - QRST$ がある。この2つの立体を重ねたら図3のようになった。

このとき、2つの立体の共通部分の体積を求めなさい。ただし、線分 QS 上に2点 E, G があり、線分 RT 上に2点 F, H があるものとする。

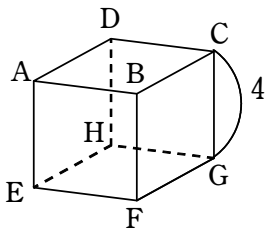


図1

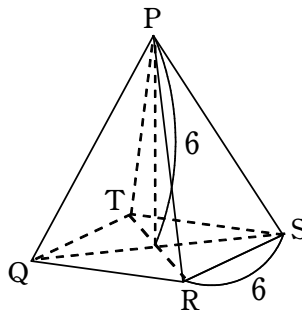


図2

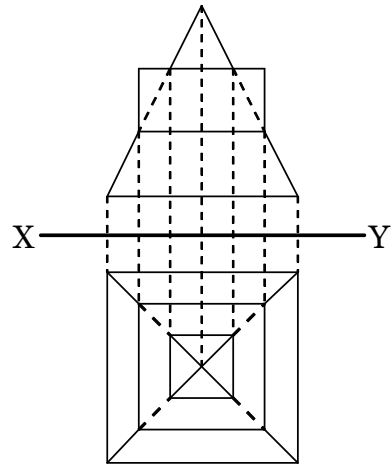
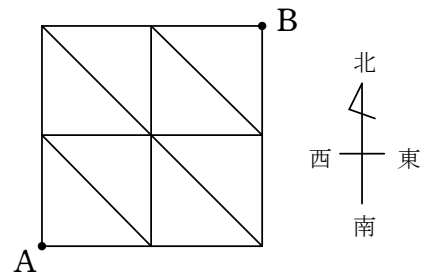


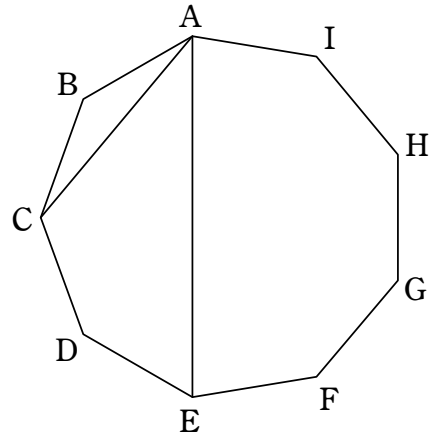
図3 (投影図)

- (4) 右の図のような道を通って南西の地点 A から北東の地点 B まで移動する経路は全部で何通りあるか求めなさい。

ただし、それぞれの道は、北、東、北西、南東のいずれかの方向に進み、同じ地点は2回以上通らないものとする。



- 2 右の図の正九角形 $ABCDEFGHI$ について、 $AB+AC=AE$ であることを示しなさい。



- 3 右の図1のような0から9までの数字があり，4桁の数をこれらの数字を用いて，たとえば，2016を**2016**のように表す。

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

図1

このように表した4桁の数を，次の図2のようにそれぞれ180°回転させたとき，回転後の数も4桁の数として扱うことができる場合を考える。

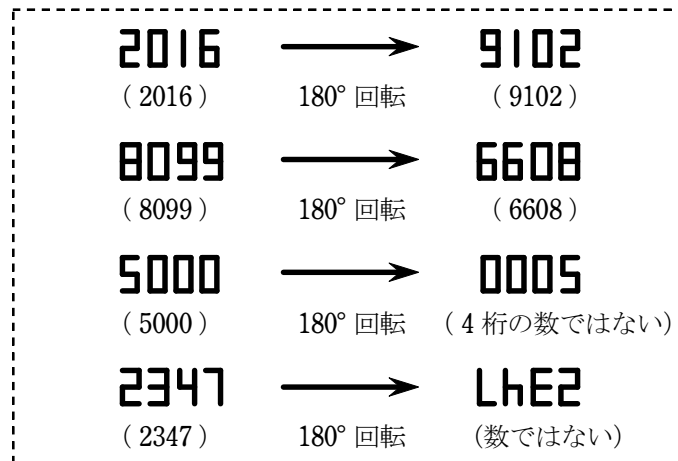


図2

このとき，2016のように，回転後の数が回転前の数以上になる4桁の数は，全部でいくつあるか求めなさい。

- 4 1辺の長さが1の立方体 $ABCD - EFGH$ において、対角線 DF の中点を O とする。
 頂点 A に対して平面 P_A を次のようにとる。

頂点 A を端点とする立方体の辺上に、相異なる3点 A_1, A_2, A_3 を $AA_1 = AA_2 = AA_3 = t$ ($0 < t \leq 1$) となるようにとり、これら3点を通る平面を P_A とする。

同じ t の値について、同様に平面 $P_B, P_C, P_D, \dots, P_H$ をとり、これら8つの平面で立方体 $ABCD - EFGH$ を切断する。

このようにして、立方体を切り分けてできる立体のうち、点 O を含む立体を V とする。
 例えば、図1のように切断した場合、立体 V は図2のようになる。

立体 V のすべての辺の長さが等しくなるような t の値をすべて求めなさい。

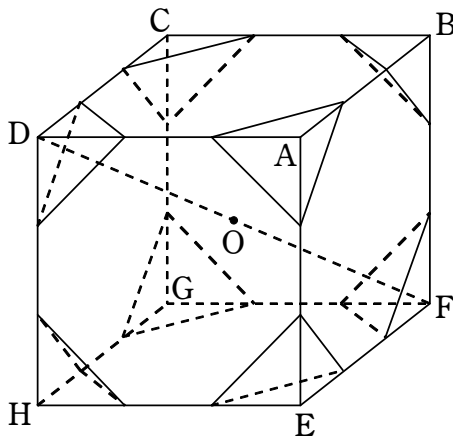


図1

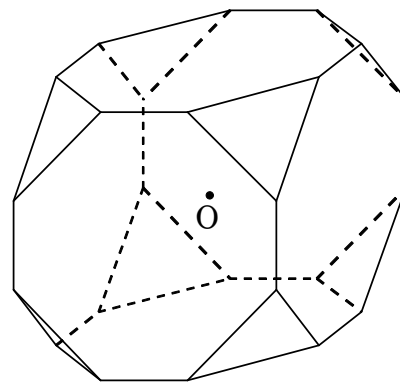


図2

5 ある素数 p に対して $\frac{1}{p}$ を 10 進法の小数で表したところ、循環節の長さが $2n$ (n は正の整数) の循環小数 $0.\dot{a}_1 a_2 a_3 \cdots a_n a_{n+1} a_{n+2} a_{n+3} \cdots \dot{a}_{2n}$ となった。

このとき、循環小数 $0.a_{n+1} a_{n+2} a_{n+3} \cdots a_{2n} a_1 a_2 a_3 \cdots \dot{a}_n$ で表される数を、 p を用いて表しなさい。ただし、 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{2n}$ は、それぞれ 0 から 9 までの整数のうちいずれか 1 つを表すものとする。

【補足】

ある循環小数について、繰り返される配列のうち数字の個数が最も少ないものを、その循環小数の循環節とよび、数字の個数を循環節の長さとしてよぶ。

(例) $0.333333\cdots = 0.\dot{3}$ (循環節の長さは 1)

$0.282828\cdots = 0.\dot{2}\dot{8}$ (循環節の長さは 2)

$0.923292329232\cdots = 0.\dot{9}\dot{2}\dot{3}\dot{2}$ (循環節の長さは 4)

【終わり】