

- 1 (1) 2016 を素因数分解すると  $2016 = 2^5 \times 3^2 \times 7$  となる。 $n^n$  は 2016 で割り切れるので、2, 3, 7 のいずれでも割り切れる。2, 3, 7 は素数であるから、 $n$  は 2, 3, 7 のいずれでも割り切れる。したがって、 $n$  は  $2 \times 3 \times 7 = 42$  の倍数である。ここで  $n = 42$  とすると、

$$n^n = 42^{42} = (2 \times 3 \times 7)^{42} = 2^{42} \times 3^{42} \times 7^{42} = 2^5 \times 2^{37} \times 3^2 \times 3^{40} \times 7^1 \times 7^{41} = 2016 \times 2^{37} \times 3^{40} \times 7^{41}$$

となり、 $n^n$  は 2016 で割り切れる。以上より、求める最小の  $n$  の値は  $n = 42$  …… 答

- (2)  $\triangle AIR \equiv \triangle AIQ$ ,  $\triangle BIP \equiv \triangle BIR$ ,  $\triangle CIP \equiv \triangle CIQ$  がすべて成り立つので、 $AR = x$  とおくと

$$AR = AQ = x, \quad BP = BR = 4 - x, \quad CP = CQ = 4\sqrt{3} - x$$

$$BP + CP = 8 \text{ より, } 4 - x + 4\sqrt{3} - x = 8, \quad x = 2\sqrt{3} - 2$$

$AB : BC : CA = 4 : 8 : 4\sqrt{3} = 1 : 2 : \sqrt{3}$  であるから、 $\angle ACB = 30^\circ$ ,  $\angle ABC = 60^\circ$  である。

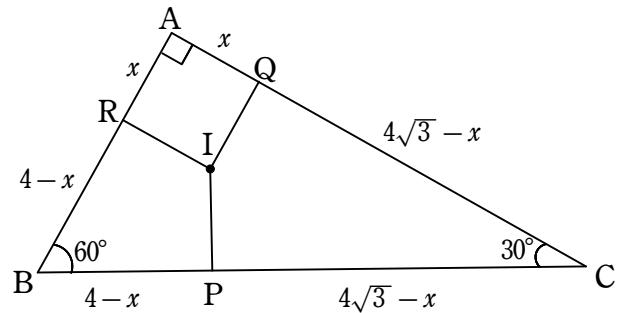
これらを用いて

$$\triangle ARQ = \frac{1}{2} \times x \times x = 8 - 4\sqrt{3}, \quad \triangle BPR = \frac{1}{2} \times (4 - x) \times \frac{\sqrt{3}}{2} (4 - x) = 12\sqrt{3} - 18$$

$$\triangle CPQ = \frac{1}{2} \times (4\sqrt{3} - x) \times \frac{1}{2} (4\sqrt{3} - x) = 4 + 2\sqrt{3}$$

以上より

$$\begin{aligned} \triangle PQR &= \triangle ABC - (\triangle ARQ + \triangle BPR + \triangle CPQ) \\ &= \frac{1}{2} \times 4 \times 4\sqrt{3} \\ &\quad - (8 - 4\sqrt{3} + 12\sqrt{3} - 18 + 4 + 2\sqrt{3}) \\ &= 6 - 2\sqrt{3} \quad \dots\dots \text{答} \end{aligned}$$



別解

$\triangle ABC$  の内部にある点  $I$  から各辺に下ろした垂線の長さが等しいので、 $I$  は  $\triangle ABC$  の内心である。内接円の半径を  $r$  とすると、 $IP = IQ = IR = r$  で、 $\triangle ABC = \triangle IAB + \triangle IBC + \triangle ICA$  より

$$\frac{1}{2} \times 4 \times 4\sqrt{3} = \frac{1}{2} \times 4 \times r + \frac{1}{2} \times 8 \times r + \frac{1}{2} \times 4\sqrt{3} \times r$$

$$\text{整理して } 4\sqrt{3} = (3 + \sqrt{3})r, \quad r = \frac{4\sqrt{3}}{3 + \sqrt{3}} = 2(\sqrt{3} - 1)$$

次に四角形  $ARIQ$ ,  $BPIR$ ,  $CQIP$  の内角の和がそれぞれ  $360^\circ$  であることから、

$$\angle QIR = 90^\circ, \quad \angle RIP = 120^\circ, \quad \angle PIQ = 150^\circ$$

よって求める面積は

$$\triangle PQR = \triangle IQR + \triangle IRP + \triangle IPQ = \frac{1}{2}r^2 + \frac{1}{2}r^2 \sin 120^\circ + \frac{1}{2}r^2 \sin 150^\circ$$

$$= \frac{1}{2} \{2(\sqrt{3} - 1)\}^2 \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\right) = (\sqrt{3} - 1)^2 (3 + \sqrt{3}) = 6 - 2\sqrt{3} \quad \dots\dots \text{答}$$

参考) 三角形の内部にある点  $I$  から各辺に下ろした垂線の長さが等しいとき、点  $I$  を中心として三角形の 3 辺に接する円をかくことができる。この円を三角形の内接円とよび、内接円の中心を内心

という。

また、別解の後半に出てくる「 $\sin 120^\circ$ 」「 $\sin 150^\circ$ 」は、高校の数学 I で学習する三角比（この場合は正弦）であり、三角形の面積を求める際に利用している。ここでは詳しくは触れないが、興味がある人は自分自身で学習を進めてほしい。

- (3) 求める立体は図 1 の立面図に網掛けで示した部分である。問題の条件から図 2 のようにそれぞれ長さが求まるので、求める体積を  $V$  とすると

$$\begin{aligned}
 V &= (1 \text{ 辺の長さが } 4 \text{ の正方形を底面とする高さが } 2 \text{ の正四角柱の体積}) \\
 &\quad + (1 \text{ 辺の長さが } 4 \text{ の正方形を底面とする高さが } 4 \text{ の正四角錐の体積}) \\
 &\quad - (1 \text{ 辺の長さが } 2 \text{ の正方形を底面とする高さが } 2 \text{ の正四角錐の体積}) \\
 &= 4^2 \times 2 + \frac{1}{3} \times 4^2 \times 4 - \frac{1}{3} \times 2^2 \times 2 \\
 &= \frac{152}{3} \quad \dots\dots \text{答}
 \end{aligned}$$

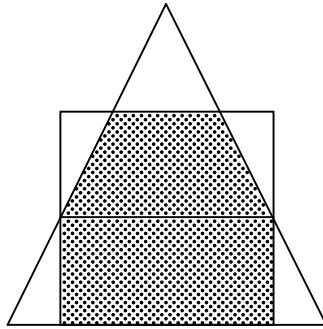


図 1

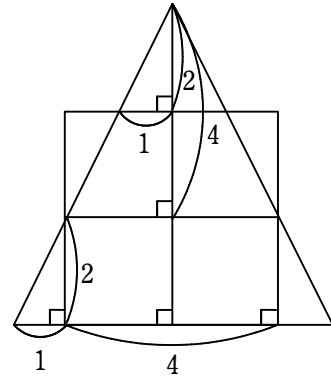


図 2

- (4) 図 1 のように、各点（交差点）に名前をつける。

- (i) 点 A から点  $L_1$ ,  $L_2$  のいずれかまで移動する場合

まず、点 A から点  $L_1$ ,  $L_2$  までそれぞれ移動する経路のうち、線分  $L_1L_2$  上の他の点を通らない経路を考えると

点  $L_1$  については  $A \rightarrow L_1$  の 1 通り …… ①

点  $L_2$  については  $A \rightarrow L_2$  の 1 通り …… ②

次に、点 A から点  $L_1$ ,  $L_2$  までそれぞれ移動する経路のうち、線分  $L_1L_2$  上の他の点を通る経路を考えると

点  $L_1$  については  $A \rightarrow L_2 \rightarrow L_1$  の 1 通り …… ③

点  $L_2$  については  $A \rightarrow L_1 \rightarrow L_2$  の 1 通り …… ④

ここで、線分  $L_1L_2$  上の移動（この場合は、 $L_1 \rightarrow L_2$  と  $L_2 \rightarrow L_1$ ）は、いずれの場合も経路は 1 通りであることから、①と④は等しく、②と③は等しい。

したがって、点 A から点  $L_1$  まで移動する経路の総数も、点 A から点  $L_2$  まで移動する経路の総数も、ともに①と②の和として求めることができる。すなわち、点 A から点  $L_1$ ,  $L_2$  までそれぞれ移動する経路の総数は、いずれの場合も  $1+1=2$  通り。

- (ii) 点 A から点  $M_1$ ,  $M_2$ ,  $M_3$  のいずれかまで移動する場合

点 A から点  $M_1$ ,  $M_2$ ,  $M_3$  までそれぞれ移動する経路のうち、線分  $M_1M_3$  上の他の点を通らない経路は、(i) の結果を用いて

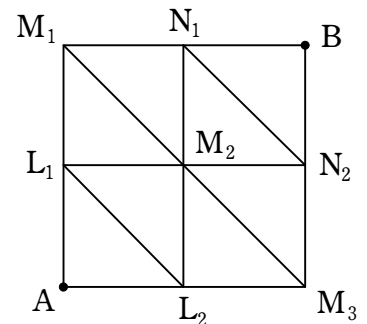


図 1

点  $M_1$  については  $A \rightarrow L_1 \rightarrow M_1$  の 2 通り

点  $M_2$  については  $A \rightarrow L_1 \rightarrow M_2, A \rightarrow L_2 \rightarrow M_2$  の合計 4 通り

点  $M_3$  については  $A \rightarrow L_2 \rightarrow M_3$  の 2 通り

(i) と同様に考えると、点  $A$  から点  $M_1, M_2, M_3$  までそれぞれ移動する経路の総数は、いずれの場合も  $2+4+2=8$  通り

(iii) 点  $A$  から点  $N_1, N_2$  のいずれかまで移動する場合

点  $A$  から点  $N_1, N_2$  までそれぞれ移動する経路のうち、線分  $N_1N_2$  上の他の点を通らない経路は、(ii) の結果を用いて

点  $N_1$  については  $A \rightarrow M_1 \rightarrow N_1, A \rightarrow M_2 \rightarrow N_1$  の合計 16 通り

点  $N_2$  については  $A \rightarrow M_2 \rightarrow N_2, A \rightarrow M_3 \rightarrow N_3$  の合計 16 通り

(i) と同様に考えると、点  $A$  から点  $N_1, N_2$  までそれぞれ移動する経路の総数は、いずれの場合も  $16+16=32$  通り

(iv) 点  $A$  から点  $B$  まで移動する場合

(iii) の結果を用いると  $A \rightarrow N_1 \rightarrow B, A \rightarrow N_2 \rightarrow B$  の合計 64 通り

以上から、求める経路の総数は 64 通り …… 答

**別解 1**

図 2 は、問題に与えられた図を、斜め方向の道を点線で置き換え、全体を時計回りに  $45^\circ$  回転させたものである。

求める経路の総数は、図 2 において、実線で表された道については右上または右下に進み、点線で表された道については上または下の方向に進んで、地点  $A$  から地点  $B$  まで行く経路の総数に等しい。それぞれの経路は実線のみか、または実線と点線で表されるが、実線の部分によって点線の部分（有無を含む）は自動的に決まるので、実線で表された道のみを考えれば経路の総数を求めることができる。すなわち、同じ点線上にある交差点を同一のものと考えて図 2 を図 3 に書き換え、図 3 の実線で表された道を地点  $A$  から地点  $B$  まで後戻りすることなく進む経路の総数を求めればよい。

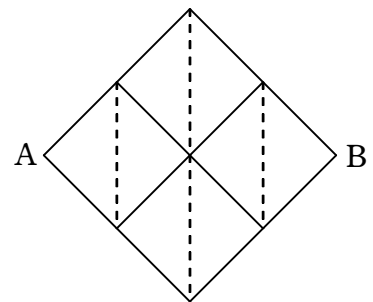


図 2

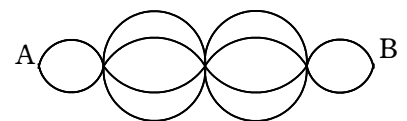


図 3

したがって、求める経路の総数は  $2 \times 4 \times 4 \times 2 = 64$  通り …… 答

**別解 2**

図 4 のように座標をとり、与えられたルールに従って原点から点  $(m, n)$  まで移動する経路のうち、直線  $y = -x + m + n$  上の他の点を通らない経路の総数を  $S(m, n)$  と表す。

$$S(1,0) = S(0,1) = 1$$

$$S(2,0) = S(0,2) = S(1,0) + S(0,1) = 2$$

$$S(1,1) = 2S(1,0) + 2S(0,1) = 4$$

$$S(2,1) = S(1,2) = 2S(2,0) + 2S(1,1) + 2S(0,2) = 16$$

$$S(2,2) = 2S(2,1) + 2S(1,2) = 64$$

したがって、求める経路の総数は 64 通り …… 答

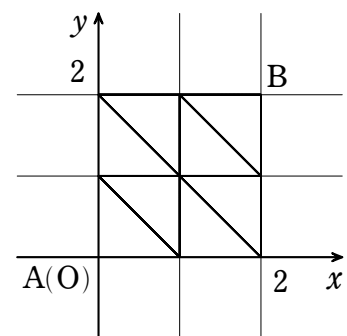


図 4

2 (正九角形の対称性から、9つの頂点をすべて通る円が存在する。この円に着目すると、円周角の定理を用いて様々な場所の角度を求めることができる。)

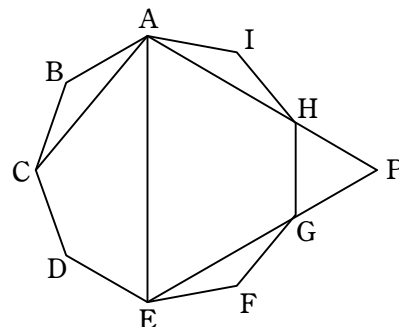
**証明**

直線 AH と EG の交点を P とする。

円周角の定理から  $\angle AEG = \angle EAH = 60^\circ$  となるので  $\triangle PAE$  は正三角形である。また、対称性から  $AC = GE = HA$  であるから、 $PG = PE - GE = PA - HA = PH$  となり  $\triangle PGH$  は正三角形。

また  $\triangle PGH$  の 1 辺の長さは、正九角形の 1 辺の長さに等しい。

以上から、 $AE = PE = PG + GE = AB + AC$  **終**



**別解 1**

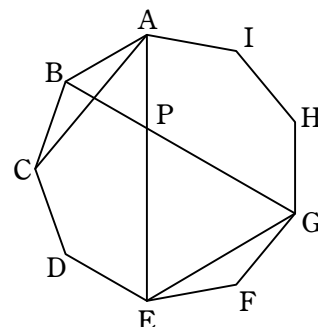
線分 AE と BG の交点を P とする。

円周角の定理から  $\angle AEG = \angle BGE = \angle EAB = \angle GBA = 60^\circ$  であるから、 $\triangle PAB$  と  $\triangle PEG$  はともに正三角形である。

したがって  $AB = AP$  …… ①

また、 $AC = GE = PE$  …… ②

①、②から、 $AB + AC = AP + PE = AE$  **終**



**別解 2**

線分 AE 上に、 $PE = ED$  となるように点 P をとると、

$PE = AB$  …… ①

円周角の定理より  $\angle PED = 60^\circ$  であるから  $\triangle PDE$  は正三角形である。

また、 $\triangle PDC$  は  $PD = CD$  の二等辺三角形で  $\angle PDC = 140^\circ - 60^\circ = 80^\circ$  であるから

$\angle DPC = \angle DCP = 50^\circ$

したがって

$\angle APC = 180^\circ - \angle EPD - \angle DPC = 180^\circ - 60^\circ - 50^\circ = 70^\circ$

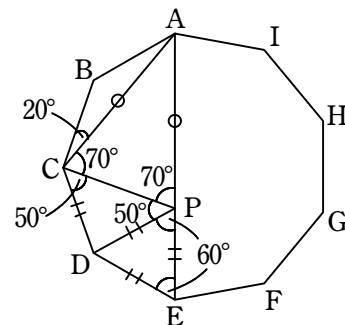
また、円周角の定理より  $\angle ACB = 20^\circ$  であるから

$\angle ACP = 140^\circ - 50^\circ - 20^\circ = 70^\circ$

よって、 $\angle APC = \angle ACP$  となり  $\triangle APC$  は二等辺三角形

ゆえに、 $AP = AC$  …… ②

①、②から  $AB + AC = PE + AP = AE$  …… **答**



**別解 3**

線分 AE 上に  $AP = AB$  となる点 P をとる。円周角の定理より

$\angle BAP = \angle BAE = 60^\circ$

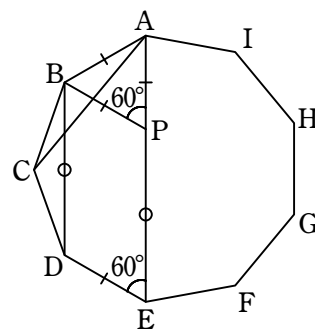
したがって  $\triangle ABP$  は正三角形となり  $\angle APB = 60^\circ$

円周角の定理より  $\angle AED = 60^\circ$  であるから  $\angle APB = \angle AED$  となり、同位角が等しいので  $BP \parallel DE$  …… ①

また、 $BP = AB = DE$  …… ②

①、②から、四角形 BDEP は、1 組の向かい合う辺が平行でかつ長さが等しいので、平行四辺形である。

よって  $AB + AC = AP + BD = AP + PE = AE$  **終**



別解 4

9つの頂点を通る円の半径を  $r$  とすると、 $AB=2r\sin 20^\circ$ 、 $AC=2r\sin 40^\circ$ 、 $AE=2r\sin 80^\circ$

和と積の公式を用いると

$$AE-AC=2r(\sin 80^\circ - \sin 40^\circ) = 2r \times 2\cos \frac{80^\circ + 40^\circ}{2} \sin \frac{80^\circ - 40^\circ}{2} = 2r \times 2\cos 60^\circ \sin 20^\circ = AB$$

よって、 $AB+AC=AE$  終

参考 別解 4 は高校で学習する正弦、余弦を用いた解法である。参考として掲載したので、興味がある人は各自で学習を進めてほしい。

3 以下、問題文の図 1 で示された数字を通常の算用数字 (0, 1, 2, ..., 9) で表す。

$180^\circ$  回転によって、0 は 0, 1 は 1, 2 は 2, 5 は 5, 6 は 9, 8 は 8, 9 は 6 とそれぞれ入れ替わり、3, 4, 7 は数字として扱えなくなる。よって、回転前の数の各位の数字として適するものは、百の位と十の位については、0, 1, 2, 5, 6, 8, 9 のそれぞれ 7 通り、千の位と一の位については、1, 2, 5, 6, 8, 9 のそれぞれ 6 通りである。

(i) 回転前の数の千の位の数字と回転後の数の千の位の数字が異なるとき

回転後の数の千の位の数字が回転前の数の千の位の数字より大きければよい。

よって、回転前の数の千の位と一の位の数字の組合せとして適するものは、次の 15 通りである。

回転前の数の千の位	1	2	5	6	8
回転前の数の一の位	2,5,6,8,9	5,6,8,9	6,8,9	6,8	6

この 15 通りのそれぞれについて、百の位と十の位の数字の決め方が  $7 \times 7$  通りあるので、求める 4 桁の数は  $15 \times 7 \times 7 = 735$  個

(ii) 回転前の数の千の位の数字と回転後の数の千の位の数字が等しいとき

回転後の数の百の位の数字が回転前の数の百の位の数字より大きいか、または等しければよい。

回転前の数の百の位と十の位の数字の組合せとして適するものは、次の 28 通りである。

回転前の数の百の位	0	1	2	5	6	8	9
回転前の数の十の位	0,1,2,5,6,8,9	1,2,5,6,8,9	2,5,6,8,9	5,6,8,9	6,8,9	6,8	6

この 28 通りのそれぞれについて、千の位と一の位の数字の決め方が  $6 \times 1$  通りあるので、求める 4 桁の数は  $28 \times 6 \times 1 = 168$  個

(i), (ii) から、求める 4 桁の数は全部で  $735 + 168 = 903$  個 …… 答

別解

回転後も 4 桁の数として扱うことができる 4 桁の数は、百の位と十の位についてはそれぞれ 7 通り、千の位と一の位についてはそれぞれ 6 通りより、全部で  $6 \times 7 \times 7 \times 6 = 1764$  個ある。

このうち、回転後の数が回転前の数と等しくなるものは、千の位と百の位の数字を決めると一の位と十の位の数字が定まることから、 $6 \times 7 = 42$  個あることがわかる。

よって、残りの  $1764 - 42 = 1722$  個の数は回転前の数と回転後の数の大きさが異なっているが、回転後の数をさらに  $180^\circ$  回転させると回転前の数に戻ることから、回転後の数が回転前の数より大きくなるものは、1722 個のちょうど半分の 861 個あることがわかる。

以上から、回転後の数が回転前の数以上になるものは、 $42 + 861 = 903$  個 …… 答

- 4 線分 AD, AB, AE 上に, それぞれ点  $A_1, A_2, A_3$  を  $AA_1=AA_2=AA_3=t$  となるようにとり, 線分 BC, BA, BF 上に, それぞれ点  $B_1, B_2, B_3$  を  $BB_1=BB_2=BB_3=t$  となるようにとる。

(i)  $0 < t < \frac{1}{2}$  のとき

立体  $V$  は,  $\triangle A_1A_2A_3$  と合同な正三角形 8 つと, 図 1 のような正方形の 4 隅が切り取られてできる八角形 6 つとで囲まれた立体である。したがって, 図 1 の八角形のすべての辺の長さが等しくなるような  $t$  の値を求めればよい。

$$A_1A_2 = \sqrt{2}t, \quad A_2B_2 = 1 - 2t \quad \text{であることから} \quad \sqrt{2}t = 1 - 2t$$

$$\text{これを解いて} \quad t = \frac{2 - \sqrt{2}}{2} \quad (0 < t < \frac{1}{2} \text{ を満たす})$$

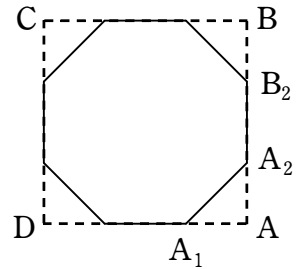


図 1

(ii)  $t = \frac{1}{2}$  のとき

立体  $V$  は,  $\triangle A_1A_2A_3$  と合同である正三角形 8 つと, 正方形の 4 隅が切り取られてできる正方形 6 つとで囲まれた立体である。これは, 明らかに題意を満たす。

(iii)  $\frac{1}{2} < t < 1$  のとき

線分  $A_1A_2, B_1B_2$  の交点を  $I$ , 線分  $A_2A_3, B_2B_3$  の交点を  $J$ , 線分  $A_2B_2$  の中点を  $M$  とする。

立方体を 8 つの平面で切断したとき, 面 ABCD には図 2 の実線で表された切断線ができ, これらで囲まれた図形 (斜線部分) は対称性から正方形である。この 1 辺の長さを  $l$  とする。

立体  $V$  は, 図 3 の右側の図 (次ページに掲載) ように, 1 辺の長さが  $l$  の正方形 6 つと, 各辺の長さが  $l$  または線分  $IJ$  の長さに等しい六角形 8 つとで囲まれた立体である。

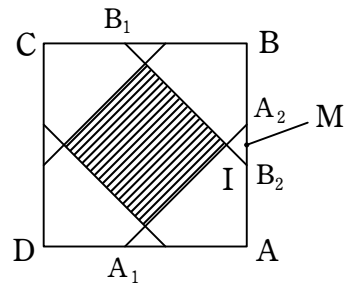


図 2

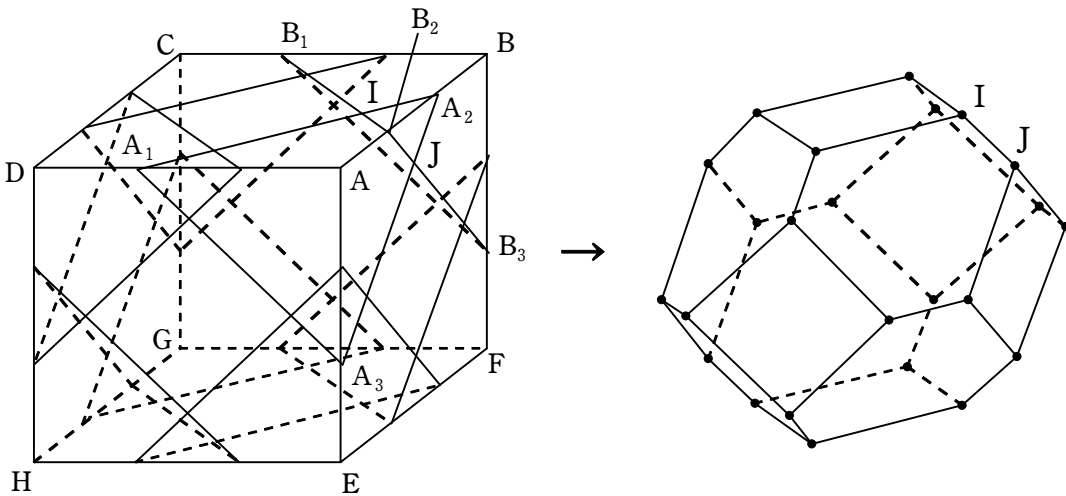


図 3

$$AA_2 = BB_2 = t, \quad AB = 1 \text{ より, } A_2B_2 = 2t - 1$$

$$\triangle IA_2B_2 \text{ は直角二等辺三角形なので, } IA_2 = \frac{2t-1}{\sqrt{2}}, \quad IM = \frac{2t-1}{2}$$

したがって

$$\ell = \sqrt{2}t - \frac{2t-1}{\sqrt{2}} \times 2 = -\sqrt{2}t + \sqrt{2}, \quad IJ = \frac{2t-1}{2} \times \sqrt{2} = \sqrt{2}t - \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\ell = IJ \text{ であればよいから } -\sqrt{2}t + \sqrt{2} = \sqrt{2}t - \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{これを解くと, } t = \frac{3}{4} \quad \left( \frac{1}{2} < t < 1 \text{ を満たす} \right)$$

(iv)  $t=1$  のとき

図4の右側の図のように、立体Vは各面の対角線の交点を頂点とする立体となるので、正八面体である。これは明らかに題意を満たす。

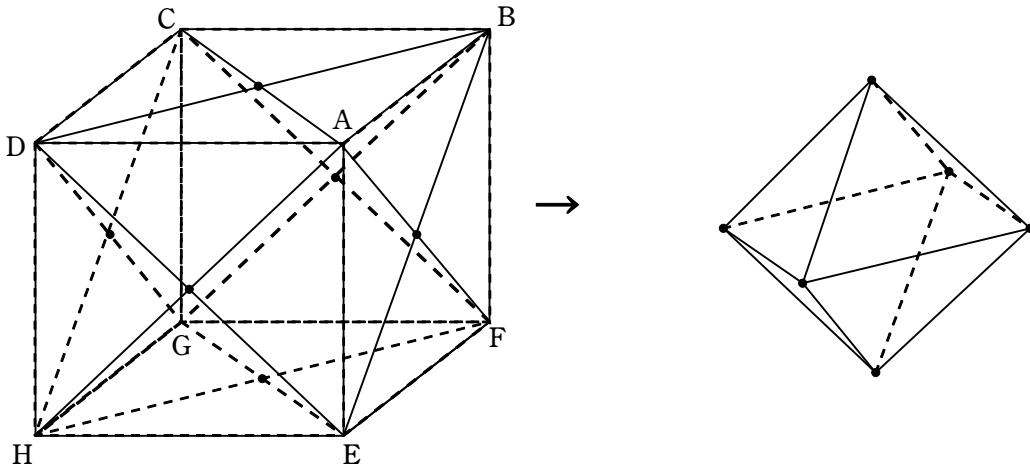


図4

$$(i) \sim (iv) \text{ より, } t = \frac{2-\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1 \quad \dots \text{ 答}$$

$$\boxed{5} \quad \frac{1}{p} = 0. a_1 a_2 a_3 \cdots a_{2n} a_1 a_2 a_3 \cdots a_{2n} a_1 a_2 a_3 \cdots a_{2n} \cdots \quad \text{①}$$

であるから、①の両辺に  $10^{2n}$  をかけて

$$10^{2n} \times \frac{1}{p} = a_1 a_2 a_3 \cdots a_{2n} \cdot a_1 a_2 a_3 \cdots a_{2n} a_1 a_2 a_3 \cdots a_{2n} a_1 a_2 a_3 \cdots a_{2n} \cdots \quad \text{②}$$

②-①より

$$(10^{2n} - 1) \times \frac{1}{p} = a_1 a_2 a_3 \cdots a_{2n}$$

この等式の右辺は正の整数であるから、左辺も正の整数である。

すなわち  $10^{2n} - 1$  は素数  $p$  で割り切れる。

$10^{2n} - 1 = (10^n - 1)(10^n + 1)$  で  $p$  は素数より、 $10^n - 1$ 、 $10^n + 1$  のいずれかが  $p$  で割り切れる。

ここで、 $10^n - 1$  が  $p$  で割り切れるとすると、 $\frac{1}{p}$  を小数で表したときに  $n$  個の数字からなる配列が繰り返されることになり、問題の条件を満たさない。

したがって、 $10^n + 1$  が  $p$  で割り切れることになり、 $10^n$  を  $p$  で割った余りは  $p - 1$  である。

$10^n$  を  $p$  で割った商を  $M$  ( $M$  は 0 以上の整数) とすれば

$$10^n = p \times M + p - 1$$

$$\frac{10^n}{p} = M + \frac{p-1}{p} \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

一方、 $\frac{1}{p} = 0.\dot{a}_1 a_2 a_3 \dots \dot{a}_{2n}$  であるから、両辺に  $10^n$  をかけて

$$\frac{10^n}{p} = a_1 a_2 a_3 \dots a_n \cdot a_{n+1} a_{n+2} a_{n+3} \dots a_{2n} a_1 a_2 a_3 \dots \dot{a}_n$$

$$\frac{10^n}{p} = a_1 a_2 a_3 \dots a_n + 0.\dot{a}_{n+1} a_{n+2} a_{n+3} \dots a_{2n} a_1 a_2 a_3 \dots \dot{a}_n \quad \dots\dots \textcircled{4}$$

③、④の小数部分は等しいから

$$\frac{p-1}{p} = 0.\dot{a}_{n+1} a_{n+2} a_{n+3} \dots a_{2n} a_1 a_2 a_3 \dots \dot{a}_n$$

したがって

$$0.\dot{a}_{n+1} a_{n+2} a_{n+3} \dots a_{2n} a_1 a_2 a_3 \dots \dot{a}_n = 1 - \frac{1}{p} \quad \dots\dots \textcircled{\square}$$

**別解**

※「 $10^n + 1$  が  $p$  で割り切れる」ことを導くところまでは、上記の解答と同じ。

$b = 0.\dot{a}_{n+1} a_{n+2} a_{n+3} \dots a_{2n} a_1 a_2 a_3 \dots \dot{a}_n$  とおく。

①の両辺に  $10^n$  をかけて

$$\frac{10^n}{p} = a_1 a_2 a_3 \dots a_n \cdot a_{n+1} a_{n+2} a_{n+3} \dots a_{2n} a_1 a_2 a_3 \dots a_n a_{n+1} a_{n+2} a_{n+3} \dots a_{2n} a_1 a_2 a_3 \dots a_n \dots$$

$$\frac{10^n}{p} = a_1 a_2 a_3 \dots a_n + b$$

両辺に  $\frac{1}{p}$  を加えて

$$\frac{10^n + 1}{p} = a_1 a_2 a_3 \dots a_n + b + \frac{1}{p}$$

$10^n + 1$  は  $p$  で割り切れるので左辺は正の整数、右辺の  $a_1 a_2 a_3 \dots a_n$  も正の整数であるから、

$b + \frac{1}{p}$  は正の整数である。ところが、 $0 < \frac{1}{p} \leq b + \frac{1}{p} \leq 1 + \frac{1}{p} < 2$  であるから  $b + \frac{1}{p} = 1$

したがって、 $b = 1 - \frac{1}{p} \quad \dots\dots \textcircled{\square}$